Familles libres d'applications

Proposition 1. *Soient $f_1, \dots, f_n$ des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Alors la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ si, et seulement si, il existe $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que la matrice $(f_i(x_j))_{i,j}$ est inversible.*

Démonstration.

— On suppose que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée, les lignes de la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sont alors liées, quel que soit le choix des scalaires $x_1, \dots x_n$.
La contraposée fournit donc une des deux implications.

— Supposons que $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ est libre. Soit F le sous-espace de dimension n qu'elle engendre.
Pour tout $a \in K$, l'application e_a d'évaluation en a est une forme linéaire sur F.
L'ensemble A des formes linéaires e_a, pour $a \in K$, constitue une partie génératrice de $F^\star$. En effet, si $f \in A^\circ$, on a $f(a) = e_a(f) = 0$ pour tout $a \in K$, donc $f = 0$. Ainsi, on a $A^\circ = \{0\}$ et $\operatorname{Vect} A = ((\operatorname{Vect} A)^\circ)^\perp = 0^\perp = F$, puisqu'on est en dimension finie.
On peut donc choisir des scalaires $x_1, \dots, x_n$ tels que les formes linéaires $e_{x_1}, \dots, e_{x_n}$ constituent une base de $F^\star$. Montrons que le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ répond à la question.

Considérons la matrice $M = (f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Montrons que les lignes $L_1, \dots, L_n$ de M forment une famille libre.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$.
On a alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_j) = 0$, c'est-à-dire $e_{x_j}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right) = 0$.
La famille $(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ étant une base de $F^\star$, on a donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \in (F^\star)^\circ = \{0\}$.
La famille $(f_1, \dots, f_n)$ étant une base de F, on en déduit que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
La matrice M est donc inversible.

□

Théorème 2. *Les translatées $f_a : h \mapsto f(a+h)$ d'applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables engendrent un s.e.v. de dimension finie de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si, et seulement si, f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.*

Démonstration.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable dont les translatées engendrent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel F de dimension n.
On considère des réels $a_1, \dots, a_n$ tels que la famille $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ soit une base de F.
D'après la Proposition 1, il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $M = (f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ soit inversible.
La fonction f étant dérivable, les fonctions f_{a_i} le sont également, ainsi que tout élément de F.

Soit g un élément quelconque de F. Montrons que g' est encore dans F.
Il est clair que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction g_a est dans F.
En effet, on a $g_a \in \operatorname{Vect}(f_{a_1+a}, \dots, f_{a_n+a}) \subset F$.

Il existe donc des réels $\lambda_1(a), \ldots, \lambda_n(a)$ tels que $g_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}$.
Montrons que les fonctions λ_i sont dérivables. On a pour $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$g(a + x_j) = g_a(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}(x_j)$$

Matriciellement, cela s'écrit $\begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}M \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix}$. On en déduit que $\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} = ({}^{\mathrm{t}}M)^{-1} \begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix}$.
Les coefficients de la matrice $({}^{\mathrm{t}}M)^{-1}$ étant indépendants de a, on en déduit que les fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $g_{x_1}, \ldots, g_{x_n}$. Elles sont dérivables comme ces dernières.

On a, pour tout réel x, $g(x + a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}(x)$.
En dérivant par rapport à a, on obtient $g'(x + a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(a) f_{a_i}(x)$.
On obtient en particulier, en prenant $a = 0$, on a $g' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(0) f_{a_i} \in F$.
On en déduit immédiatement que tout élément g de F est $\mathscr{C}^\infty$, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $g^{(k)} \in F$.
C'est vrai en particulier pour la fonction f. L'espace vectoriel F étant de dimension finie n, il existe un entier $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $f^{(p)} \in \mathrm{Vect}(f, f', \ldots, f^{(p-1)})$. La fonction f est donc solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre p.

Réciproquement, si f est solution d'une équation différencielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre p, il est clair que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f_a esst solution de la même équation différentielle. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle étant un espace vectoriel de dimension p, les fonctions f_a engendrent un espace vectoriel de dimension finie inférieure ou égale à p.

$\square$

Conclusion. Les translatées de f engendrent un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie si, et seulement si, f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. $\triangleleft$

Références

[FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 1.* Cassini